

МЕХАНИКА СЫПУЧИХ СРЕД ПРИ ВИБРАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ: МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Л. А. ВАЙСБЕРГ¹, И. В. ДЕМИДОВ², К. С. ИВАНОВ¹
(1 — НПК «Механообр-техника», РФ; Институт проблем машиноведения РАН, РФ)*

В статье представлен обзор современных методов численного исследования и моделирования динамики сыпучих сред при вибрационных воздействиях. Внимание уделяется характерным режимам — «агрегатным состояниям» сыпучего материала, реализующимся в зависимости от интенсивности вибрационного воздействия и механических характеристик материала. Выделяются три «агрегатных состояния»: упруго-пластичное твердое тело — если взаимное расположение частиц материала меняется слабо, вязкая «гранулярная жидкость» — если преобладают смещения частиц без разрыва контактов, и «гранулярный газ» — когда время контактного взаимодействия между частицами мало по сравнению со временем их свободного пробега. Также выделяются три группы подходов к моделированию: микроскопические — рассматривающие материал на уровне отдельных частиц, статистическая механика/кинетическая теория — обобщающие кинетическую теорию газов для неупругих взаимодействий, феноменологические модели и модели сплошной среды. Для каждой группы моделей указаны диапазоны применимости и возможности методов. Применение описанных подходов проиллюстрировано рядом случаев специфического поведения сыпучих материалов: гранулярном эффекте Лейденфроста, гранулярной конвекции, осцилляциях и др.

Ключевые слова: сыпучая среда, вибрационное воздействие, агрегатное состояние материала, математическое моделирование, микроскопические модели, феноменологические модели, модели сплошной среды.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17580/or.2015.04.05>

Введение

Прикладное значение механики сыпучих сред в сфере обогащения полезных ископаемых трудно переоценить. Однако при всем богатом спектре практических приложений этот раздел науки еще очень далек от формулирования таких общих принципов своей теории, какие есть, например, в механике сплошных сред. В зависимости от внешних воздействий сыпучие среды демонстрируют широкое разнообразие типов поведения, в том числе они могут вести себя подобно упруго-пластичным твердым телам, вязким жидкостям и даже «гранулярным газам» (подробнее «агрегатные состояния» сыпучих сред описаны в работе [1]). Этим в немалой степени и объясняется разнообразие существующих подходов для описания таких сред. Принципиально подходы к моделированию сыпучих материалов можно разделить на три класса:

- 1) микроскопические модели и моделирование методами молекулярной динамики;
- 2) статистическая механика и кинетическая теория;
- 3) феноменологические модели и модели сплошной среды.

* Вайсберг Леонид Абрамович — научный руководитель, член-корр. РАН, д-р техн. наук, профессор, gornyi@mtspb.com; Демидов Иван Викторович — аспирант; Иванов Кирилл Сергеевич — научный сотрудник, канд. техн. наук; gornyi@mtspb.com.

Подходы к описанию сыпучих материалов и границы их применимости

1. Микроскопические модели и моделирование методами молекулярной динамики

В этих подходах рассматриваются, как правило, столкновения отдельных частиц; такие модели справедливы для сухого сыпучего материала, вязкие силы сопротивления жидкости или газа могут существенно изменить динамику частиц. В настоящее время имеется понимание взаимодействия отдельных малых частиц с жидкостью в рамках закона Стокса, но коллективное взаимодействие большого числа частиц с жидкостью остается открытой проблемой. Существуют теоретические модели, описывающие системы частиц с жидкостью, но обычно они основываются на феноменологическом подходе (например [2]). Отметим также работу [3], в которой экспериментально изучено влияние воздуха на динамику сыпучего материала при воздействии вибрации. Авторы показали, что изменение давления газа в слое материала во времени удовлетворительно описывается, если сыпучий материал рассматривать как пористое тело.

Поскольку число частиц в системе, как правило, велико, то решение полной системы уравнений движения — крайне трудоемкая задача, разрешимая только на ЭВМ. При этом, чем плотнее исследуемая система, тем выше ресурсоемкость вычислений.

Данные методы успешно применяются в исследовании фундаментальных проблем физики сыпучих

материалов, например для изучения неупругого коллапса (см. ниже), для изучения влияния трения, вращательных степеней свободы частиц, влияния типа их деформационного поведения (упругие, вязкоупругие частицы). Использование микроскопических моделей позволяет получить оценочные выражения для коэффициентов переноса (например коэффициента теплопроводности), которые крайне важны в феноменологических моделях.

Детальное знание свойств частиц, определяющих их поведение при столкновениях, имеет большое значение для реалистичного моделирования сыпучих материалов методами молекулярной динамики. Наиболее фундаментальное микроскопическое свойство сыпучих материалов – это диссипация энергии в результате столкновения частиц. В простейшей модели неупругие соударения описываются только нормальным коэффициентом восстановления R , определяемым как соотношение нормальных относительных скоростей частиц до и после соударения. В более сложных моделях, учитывающих шероховатость поверхности и трение, происходит обмен между поступательной и вращательной энергиями частиц [4], и, соответственно, требуется учитывать и тангенциальный коэффициент восстановления.

Большой научный интерес представляет проблема моделирования гранулярных систем из сильно неупругих частиц (где R не близко к единице), которая в основном исследуется численным путем.

Неупругое взаимодействие частиц с постоянным коэффициентом восстановления может привести к такому явлению, как неупругий коллапс – полная остановка всех частиц за конечное время. Данный феномен интенсивно изучается в современной литературе [5, 6–8]. В нем наблюдается «фазовый переход» жидкость – твердое тело. Неупругий коллапс наблюдается даже в достаточно простых системах, к примеру в системе, представляющей собой шарик, прыгающий над неподвижной плоскостью. Если соударения с плоскостью неупругие, то после каждого удара скорость шарика уменьшается в R раз ($R < 1$ и является постоянной величиной). После n -го соударения с плоскостью имеем $u_n = R^n u_0$, здесь u_0 – скорость шарика перед первым соударением. Отсюда время между соударениями $t_n = 2u_n R^n / g$. Видно, что ряд, составленный из этих времен, представляет собой убывающую геометрическую прогрессию, которая сходится к значению $T = t_1 + t_2 + \dots = 2u_0 R / [g(1 - R)]$. Иными словами, шарик испытает бесконечное число соударений с плоскостью за конечное время.

В работе [9] показано, что для появления неупругого коллапса требуется, чтобы при соударении частиц потери энергии превосходили некоторое критическое значение. То есть неупругий коллапс возможен при некотором критическом значении R_c . Однако для реальных материалов R – величина не постоянная. Оказывается, что коэффициент восстановления является функцией относительной скорости соударяю-

щихся частиц: он монотонно повышается с уменьшением скорости и в пределе стремится к единице при $u \rightarrow 0$ [10–12]. В моделях с «физическим» R неупругий коллапс не наступает.

Очевидно, дело во внутреннем строении гранул, в описании которого допустимо использование континуальных моделей. Столкновения частиц не рассматривают как чисто пластические, т. к. в этом случае будет нарушаться их сферическая форма, вязкоупругие же частицы восстанавливают свою форму. Большая часть теории «гранулярных газов» оказалась бы невероятно сложной (или даже практически неприменимой) вне рамок предположения о сферической форме частиц [13]. В монографии [13] выведена функциональная зависимость $R(u)$ для вязкоупругих частиц:

$$R(u) = 1 - D_1 u^{\frac{1}{5}} + D_2 u^{\frac{2}{5}} \mp \dots,$$

где D_1, D_2 – известные константы, зависящие от свойств материала и радиуса частиц. Естественно, в системе из вязкоупругих частиц неупругий коллапс невозможен [13].

Стоит отметить, что и для тангенциального коэффициента восстановления также есть более сложные модели, например, в [14] он зависит от угла столкновения.

Существуют три основных подхода к моделированию методами молекулярной динамики: метод «мягких» частиц; алгоритм, управляемый событиями; метод контактной динамики твердых частиц.

2. Статистическая механика и кинетическая теория

Взаимодействия между частицами сыпучих материалов по своей природе неупруги, при столкновениях частиц теряется часть кинетической энергии. Следовательно, подходы, основанные на чисто упругих взаимодействиях или сохранении энергии, такие как теория идеальных газов, не могут удовлетворительно описать поведение «гранулярных газов» [1].

При малых плотностях поведение «гранулярного газа» можно адекватно описать с помощью кинетического уравнения Больцмана, адаптированного для учета неупругости соударений [15–17]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f = I[f],$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ – функция распределения частиц по скоростям; $I[f]$ – адаптированный неупругий интеграл столкновений. Свойства интеграла столкновений описаны в монографии [13].

Для слабо неоднородных газов с малыми градиентами гидродинамических полей (их изменение мало по сравнению с величиной свободного пробега частиц) при решении уравнения Больцмана используют схему Чепмена–Энскога: строится разложение функции распределения в виде $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots$, где $f^{(k)}$

зависит от k -го порядка градиентов. Функция $f^{(0)}$ удовлетворяет уравнению Больцмана для однородного газа. Схема Чепмена—Энскога дает метод решения уравнений относительно каждой $f^{(k)}$.

Развитая теория позволяет описать только «почти упругие» частицы [13, 15]. Это связано с тем обстоятельством, что для вывода уравнения Больцмана необходимо предположение о «молекулярном хаосе», при котором скорости частиц никак не коррелируют между собой. Но если соударения частиц неупругие, то возможно образование различных коллективных структур. Выше было описано явление неупругого коллапса, возникающее в системах с неупругими частицами с постоянным коэффициентом восстановления. Но в результате неупругого взаимодействия частиц даже с непостоянным R в системе могут возникнуть различные структуры. Например, сыпучий материал в сосуде при отсутствии каких-либо внешних силовых полей по истечении некоторого промежутка времени демонстрирует кластеризацию и спонтанное рождение вихревых структур.

Формирование кластеров можно объяснить наличием малых флуктуаций плотности в газе. В более плотных областях частицы соударяются чаще, чем в разреженных. Поэтому вследствие неупругих соударений плотные области системы «охлаждаются» быстрее, чем разреженные, и, следовательно, локальное «давление» в плотных областях понижается. Образующийся перепад давления вызывает поток частиц в плотные области, в результате чего происходит дальнейшее увеличение локальной плотности. Из этих рассуждений следует, что изначально малые отклонения плотностей усиливаются, что и приводит к формированию кластеров (рис. 1).

Появление вихревых структур связано с неупругим соударением частиц: нормальная составляющая скорости уменьшается, и если трение между частицами пренебрежимо мало, то тангенциальная составля-

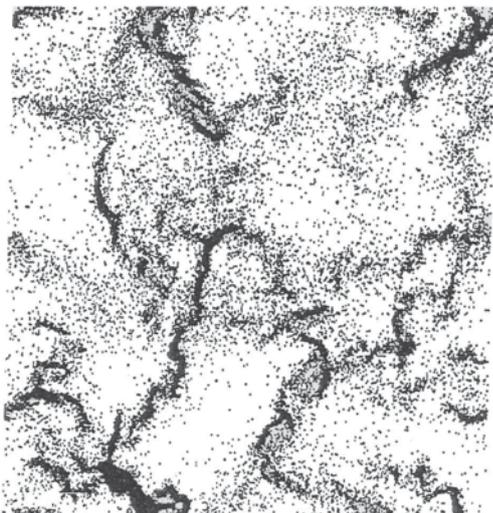


Рис. 1. Типичная конфигурация из 40000 неупруго сталкивающихся частиц, демонстрирующая кластеризацию в двумерном случае [1]

ющая скорости остается почти неизменной. В результате многих столкновений локально частицы движутся более параллельным и согласованным образом, и за счет этого образуются отдельные участки вихря. При выраженной кластеризации и наличии вихрей кинетический подход теряет применимость, но есть работы, в которых изучаются корреляции скоростей (как угловой, так и поступательной) на начальных этапах неустойчивостей свободного «гранулярного газа» с шероховатыми частицами (например [18]). Отметим недавнюю работу [16], в которой авторы с помощью метода Чепмена—Энскога получили выражения для коэффициентов переноса в случае неупругих шероховатых твердых сферических частиц. В работе [19] на основе кинетического подхода авторами выведены коэффициенты переноса для бинарной смеси «гранулярных газов».

С помощью функции распределения скоростей можно определить и так называемую «гранулярную

температуру» материала: $T_{x,y} = \frac{1}{2} m \langle v_{x,y}^2 \rangle$ [20]. Примеча-

тельно, что при рассмотрении сыпучего материала в вертикально колеблющемся сосуде оказалось, что T_x и T_y не равны [21]. Дальнейшие исследования показали, что даже вертикальное распределение температуры является анизотропным. Таким образом, «гранулярная температура» в рассматриваемых системах не является скаляром и равномерного распределения энергии здесь не наблюдается. Причина анизотропии кроется в неупругости соударений частиц и природе ввода (nature of driving) энергии в систему [22].

Большой интерес представляет «гранулярная температура» бинарной смеси. Является ли «гранулярная температура» одинаковой для всех частиц в бинарной смеси, в которой частицы могут отличаться по плотности, размерам или упругим свойствам? Оказывается, что температура двух сортов частиц различна. Более того, отношение температуры более тяжелых частиц к температуре более легких повышается с ростом отношения их масс. Отношение температур не сильно чувствительно к упругим свойствам частиц, скорости вибрации, но зависит от способа упаковки частиц [22–25].

Случай разных температур был рассмотрен в работе [26] при использовании кинетического подхода. Предложенная модель годится для разреженной системы больших частиц. Локальная плотность изменяется, потому что присутствие больших частиц делает область локально горячей или холодной. Это вызывает изменение эффективной локальной плотности, которая, в соответствии с вычислениями авторов рассматриваемой работы, приводит к возникновению выталкивающей силы. Указанные авторы также вывели критерий всплывания большого («чужеродного») шара, зависящий от размеров и плотности. Однако они предположили, что давление и температура постоянны в его отсутствие. Таким образом, роль градиентов температуры, которые существуют в виброожи-

женном режиме, когда энергия вводится в систему через границы, пока что осталась неясной.

Уравнение Больцмана также использовалось для описания плотностей силовых цепей в различных направлениях в «твердом» сыпучем материале [27].

3. Феноменологические модели и модели сплошной среды

Используя уравнения Больцмана, можно прийти и к уравнениям гидродинамики:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)n = -\nabla \cdot (n\mathbf{u});$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{m} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g};$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \varepsilon,$$

где $T = m(\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle^2) / 2$ — «гранулярная температура»; n — плотность сыпучего материала; \mathbf{u} — поле скоростей; $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ — тензор вязких напряжений (\mathbf{e}_α — орты выбранной системы координат, $\alpha = 1, 2, 3$); $\dot{\mathbf{D}} = (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ — тензор скоростей деформаций; $\mathbf{q} = -k \nabla T$ — тепловой поток; ε — скорость диссипации энергии.

Обычно эти уравнения применяются как к «гранулярному газу», так и к жидкости (см. например [13, 28–34]).

Теоретическое исследование возникновения неустойчивостей (кластеризации и вихрей) в «гранулярном газе» главным образом основано на линейном анализе устойчивости гидродинамических флуктуаций плотности δn , температуры δT и скорости $\delta \mathbf{u}$ [13]. После линеаризации уравнений гидродинамики, как правило, делается Фурье-преобразование с целью получить линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Эти уравнения имеют решения вида $\delta \Psi_{\mathbf{k}}(\tau) = \exp(\lambda(\mathbf{k})\tau) \delta \Psi_{\mathbf{k}}(0)$, где $\delta \Psi_{\mathbf{k}}(\tau)$ означает вектор-столбец, содержащий флуктуации плотности, температуры и трех компонент скорости; τ — безразмерное время. Если $\lambda(\mathbf{k}) > 0$, то наблюдается экспоненциальный рост возмущений, если $\lambda(\mathbf{k}) < 0$ — экспоненциальное затухание. На данный момент известно, что вихревые структуры возникают раньше, чем кластеры. Отметим также, что есть несколько работ, в которых при анализе устойчивости учитывались нелинейные слагаемые [35, 36].

Рассмотрим несколько примеров, где успешно применялись уравнения сплошной среды.

Как известно, при падении камня в воду формируется всплеск, вызванный схлопыванием образовавшейся полости. В сыпучем материале можно наблюдать аналогичное явление. В частности, исследователи [28] бросали стальной шарик в слой песка и наблюдали формирование струи (рис. 2), образующейся по

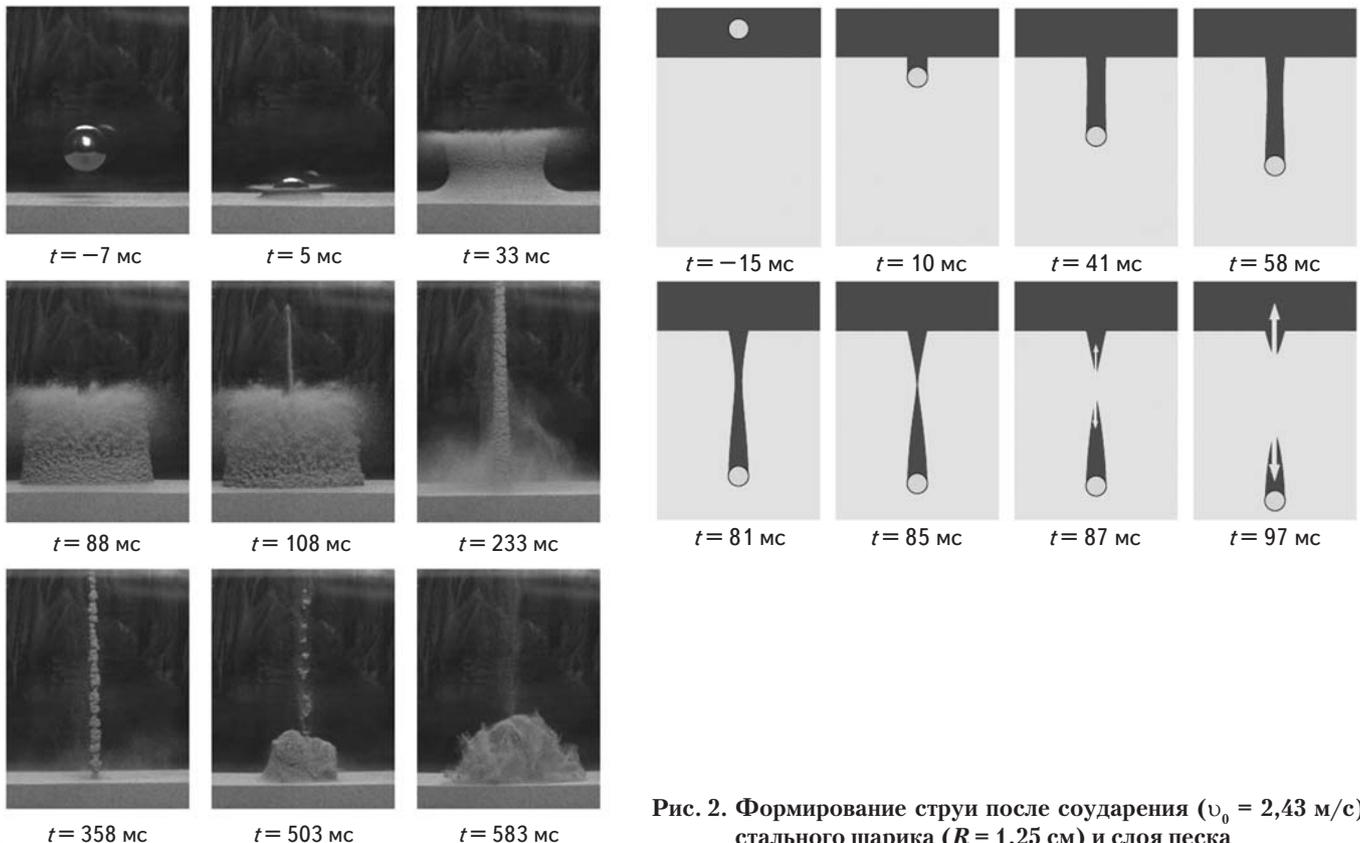


Рис. 2. Формирование струи после соударения ($v_0 = 2,43$ м/с) стального шарика ($R = 1,25$ см) и слоя песка

тому же принципу, что и в обычной жидкости. Подобные эксперименты проводились и ранее [37], но в данной работе использовался очень мелкий песок. Учитывая гидродинамическую аналогию, авторы использовали уравнения сплошной среды, чтобы выявить основные закономерности схлопывания полости. После ряда предположений они получили уравнение типа Рэлея, которое описывает эволюцию радиуса полости $R(z, t)$ по высоте (где z — вертикальная координата). В результате авторам удалось оценить время, в течение которого стенки полости впервые столкнутся. Динамика полости, следующая из этой модели, представлена на рис. 2.

Интересный подход к описанию «гранулярных жидкостей» в двумерном случае был использован в работе [29]. В ней также изначально записывались гидродинамические уравнения. Авторы изучали простейший случай, когда флуктуации концентрации частиц и их «температура» (т. е. подвижность) малы. Эти условия могут быть реализованы в несжимаемых течениях, где $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Кроме того, предполагалось, что отсутствует сила тяжести и частицы являются почти упругими. Такие допущения существенно упрощают уравнения. Далее авторы вводят тензорный параметр порядка $S = \nabla \mathbf{u}$, который фактически является тензором скоростей деформации, и записывают упрощенные уравнения через этот параметр порядка. Полученное уравнение содержит функционал энергии $H[S]$, минимум которого и дает нужное решение (рис. 3).

Как видно из рис. 3, минимум функционала энергии достигается при целом множестве параметров порядка, которые лежат на одной окружности. Таким образом, имеет место спонтанное нарушение симметрии. Так как по условию $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, то поле скоростей является соленоидальным, поэтому если минимум функционала энергии реализуется при отличном от нуля параметре порядка, то в системе рождаются вихревые течения. Результаты теоретических выводов подтвердились компьютерным моделированием.

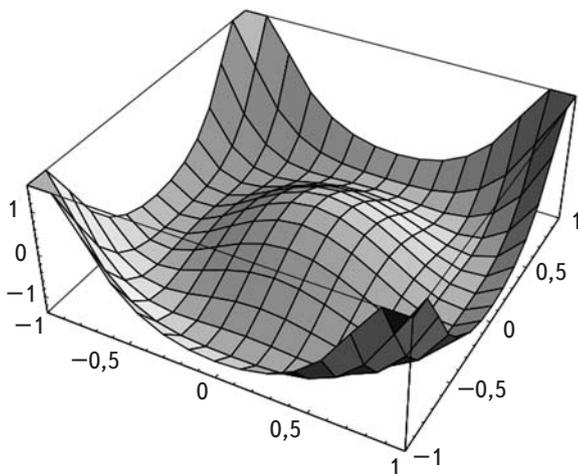


Рис. 3. Форма функционала энергии в зависимости от параметра порядка

Во введении было отмечено, что в некоторых случаях сыпучий материал можно рассматривать как твердое тело. Здесь частицы главным образом остаются в непосредственном контакте, и вся динамика такого материала контролируется силой тяжести, силой трения и шероховатостью поверхности частиц. Силы трения играют большую роль, именно они ответственны за специфическое свойство сыпучей среды — гистерезис напряжений [38].

Такое состояние сыпучего материала можно описывать с помощью уравнений теории упругости «в напряжениях». Основной принцип этого подхода — получение соотношений между компонентами тензора напряжений в равновесном состоянии сыпучей среды. Например, такое соотношение можно получить, рассматривая предельное напряженное состояние. В итоге мы приходим к условию прочности Мора—Кулона. С помощью данного условия можно определить напряжения на любой произвольно выбранной площадке в сыпучем материале, находящемся в предельном напряженном состоянии. На основе соображений симметрии и при рассмотрении простых правил передачи напряжений между соседними гранулами можно показать локальную пропорциональность диагональных компонент тензора напряжений, что является локальным случаем гипотезы Янсена. Из такого предположения следует, что напряжения подчиняются гиперболическому уравнению (как волновое уравнение), а не эллиптическому, как это было в теории упругости [39]. А это означает, что напряжения «распространяются» вдоль линий, которые представляют собой характеристики гиперболического уравнения. Это математическое отражение того, что в «твердом» сыпучем материале существуют силовые цепи.

Модели сплошных сред [40], включающие методы теории эффективных сред, оказались неудовлетворительными при описании некоторых важных особенностей «твердого» сыпучего материала, таких как зависимость скорости звука от давления [41]. Вероятно, генерирование силовых цепей в напряженном сыпучем материале и ответственно за отклонения этих моделей. Но также отметим, что модель Янсена совместно с уравнениями теории упругости «в напряжениях» успешно использовалась для расчета напряженного состояния сыпучего материала в бункерах и силосах [38], что очень важно для практических целей.

Одних уравнений гидродинамики не хватает для полного описания поведения «гранулярного газа» или «жидкости». И действительно, они содержат такие величины, как теплопроводность, вязкость, вторая вязкость, скорость диссипации энергии, давление. Очевидно, что эти величины не являются константами, поэтому, чтобы замкнуть эту систему уравнений, нужно найти выражения для соответствующих величин, определить их зависимость от температуры и плотности. Как уже отмечалось, для этого также широко используется кинетическая теория [16]. В книге [13] приводится вывод коэффициентов переноса для газа,

состоящего из упругих частиц, неупругих частиц с постоянным коэффициентом восстановления, а также для вязкоупругих частиц.

Следует отметить, что существует огромное множество феноменологических моделей сыпучих сред. Это связано с тем, что каждая из них создана для описания какого-то конкретного явления. Так, в частности, представляют интерес модели для описания поведения свободной поверхности сыпучего материала под действием вибрации. Рассмотрим несколько примеров.

Помимо явлений, возникающих в толще материала при вибрации (таких как конвекция, сегрегация и др.), Фарадеем [42] были отмечены также необычные образования на поверхности сыпучего материала. Экспериментально выявлено множество эффектов коллективного поведения частиц сыпучего материала на свободной поверхности: стоячие волны, полосы, шестиугольники, квадраты, спирали и многое другое. Некоторые образования были изучены лишь в последние годы. В частности, в работе 1996 года [43] было сообщено о наблюдении совершенно новых устойчивых одиночных структур – осциллонов (рис. 4).

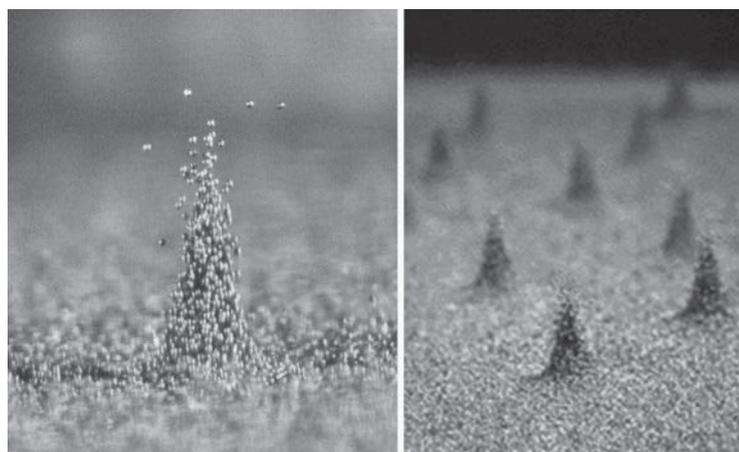


Рис. 4. Осциллоны в системе из бронзовых шариков

Осциллоны представляют собой очень устойчивые волноподобные состояния локализованных колебаний, которые образуются на поверхности сыпучего материала при вертикальной вибрации. Как правило, осциллоны имеют ширину порядка 30 гранул [44]. В отличие от волн, они не распространяются, но могут дрейфовать через слой материала.

Большой интерес к изучению поведения этих образований связан с тем, что они осциллируют как на половинной, так и на той же частоте, что и возбуждающая сила. Это условие позволяет осциллонам противоположных фаз существовать одновременно. Когда два осциллона противоположных фаз сближаются, они притягиваются друг к другу. Если же взаимодействуют два осциллона, находящиеся в одной фазе, то они отталкиваются [45].

Поведение осциллонов изучается как экспериментально, так и теоретически [46–50]. Хотя методы молекулярной динамики успешно воспроизводят экспериментальные наблюдения в сыпучей среде, они обеспечивают ограниченное понимание механизма формирования осциллонов.

В работе [46] на основе подхода Гинзбурга–Ландау (введение определенного параметра порядка) была предложена простая феноменологическая модель формирования структур на поверхности вибрирующего слоя сыпучего материала, в которой можно наблюдать появление осциллонов. В результате анализа используемых уравнений авторы построили «карту режимов» для квадратных и валиковых (roll) структур на свободной поверхности, которая качественно согласуется с экспериментами. Также были найдены и осциллонные решения в области существования квадратных структур.

В работе Крауфорда и Рейке [48] разработана двумерная модель Свифта–Хоэнберга, которая порождает осциллонные решения. Как подчеркивается в [45], представленная авторами модель иллюстрирует ключевое понимание явления: осциллоны не зависят от сыпучих сред. Скорее, осциллоны могут возникнуть в любой сплошной среде, которая производит квадратные структуры на свободной поверхности (см. также [44]). И действительно, осциллоны экспериментально наблюдаются в слоях вязкой жидкости, суспензиях и коллоидных смесях при вертикальной вибрации [44], а также в химических реакциях [51, 52]. Возможно, появление осциллонов в других физических системах поможет лучше понять природу сыпучих материалов.

Одним из ключевых вопросов механики сыпучих сред является применимость уравнений гидродинамики к «гранулярным газам» и «жидкостям» в различных условиях. При рассмотрении сильно неупругих частиц такое описание не будет удовлетворительным, поскольку данные уравнения не могут описать образующиеся коллективные структуры. Но встречаются работы, в которых используется нелинейное уравнение Бюргера для описания взаимодействия кластеров на поздней стадии эволюции свободного от внешних сил сыпучего материала [53]. Экспериментальное исследование взаимодействия кластеров можно найти в работе [54].

Сыпучий материал под действием вибрации

Специфика данной проблемы состоит в том, что под действием вибрации сыпучий материал может пребывать в разных «агрегатных состояниях» – «гранулярного газа», «жидкости» и «твердого тела». Для каждого из них необходимо свое описание. Поэтому здесь находят применение все теоретические подходы, описанные выше. В классической работе [55] пред-

ставлена модель вибрационного перемещения сыпучего материала в режиме подбрасывания, при этом динамика сыпучей среды рассматривается на уровне единичной частицы. Несмотря на кажущуюся простоту модели, она позволяет не только получить качественные результаты, но и количественно оценить важные с прикладной точки зрения параметры вибрационного перемещения. Некоторые оригинальные подходы представлены в работах [56, 57]. В настоящее время в НПК «Механобр-техника» разрабатываются модели эффекта вибрационного оживления для замены воды в технологических процессах, где она играет роль дисперсионной среды, и ряда ранее не изученных явлений, в частности градиентной сегрегации [58, 59].

В вертикально колеблющемся слое сыпучего материала имеют место такие явления, как образование поверхностных структур (похожих на волны Фарадея в обычной жидкости), гранулярный эффект Лейденфроста и конвективные течения в толще материала (напоминающие течения в подогреваемой снизу жидкости, возникающие вследствие неустойчивости Рэлея—Бенара). Поскольку аналогичные явления можно наблюдать и в обычной жидкости, то для их описания часто применяется подход с использованием уравнений гидродинамики. Следует отметить, что аналогия между «гранулярной» и обыкновенной жидкостью недостаточна. В частности, в терминах вибрационной механики в «гранулярной жидкости» необходимо учитывать объемные вибрационные силы (а не только поверхностные) при изучении медленных движений [60]. Это обстоятельство играет первостепенную роль при формулировании граничных условий. Из изложенного ниже видно, что для сыпучего материала, находящегося под действием вибрации, можно записать три уравнения: уравнение неразрывности, уравнение Навье—Стокса и уравнение энергетического баланса. Последнее уравнение задает «гранулярную температуру», которая определяется полем вибрации в среде. Таким образом, в такой гидродинамической постановке задачи объемными вибрационными силами являются силы типа архимедовых, вводимые через зависимость плотности от температуры.

В то же время во многих задачах, связанных с поведением сыпучего материала под действием вибрации, находят свое применение и феноменологические модели (см. выше), а в случае очень разреженного материала и микроскопические.

Теоретическое исследование проникновения поперечной вибрации в сыпучую среду представляет большой прикладной интерес [60] в связи с теорией вибрационных мельниц, а также аппаратов с виброкипящим слоем, используемых в химической технологии.

Можно отметить работу А. Я. Фидлина о решении задачи проникновения поперечной вибрации от дна сосуда в сыпучую среду. Им была использована одномерная динамическая континуальная модель, разработанная в соавторстве с Е. Б. Кремером [61], пред-

ставляющая собой систему из неупругих шариков одинакового размера, движущихся вдоль одной прямой в однородном силовом поле. Из полученных результатов следовало, что «затухание» пульсационной скорости частиц материала носит экспоненциальный характер, что согласуется с экспериментальными данными. Отметим, что определенные трудности связаны с обобщением данной модели на трехмерный случай, а также с формулировкой соответствующих этой модели граничных условий [60]. Но в то же время в этой модели нет ограничения на величину коэффициента восстановления. Вполне возможно, что объединение такого подхода с широко используемыми «традиционными» гидродинамическими теориями может дать универсальную модель, описывающую сыпучие материалы из сильно неупругих частиц.

Интересно заметить, что подобная одномерная модель, используемая для получения уравнений сплошной среды, применялась с противоположной целью: найти пределы возможностей «гранулярной гидродинамики» [62]. Авторы этой работы рассматривали горизонтальную трубку, в которой находится N неупруго сталкивающихся частиц. Каждый раз, когда крайняя левая частица соударяется с левой стенкой, ей сообщается случайная скорость (рис. 5). Соударение с правой стенкой полностью упругое. Авторы показали, что гидродинамика позволяет описать плотность всей системы (если исключенный объем правильно учитывается), но не профиль энергии. Таким образом, эта одномерная система указывает точные границы применимости теории и, кроме того, объясняет причины ограниченности применимости.



Рис. 5. Эволюция одномерной гранулярной системы

Если сыпучий материал содержит частицы разных размеров и плотностей, то возможна сегрегация частиц под действием вибрации. Довольно часто рассматривается частный случай общей задачи: концентрации интересующих исследователя частиц настолько малы по сравнению с концентрацией остальных частиц сыпучего материала, что можно не учитывать (или учитывать приближенно) их взаимодействие между собой и рассматривать их движение как движение изолированных частиц. При этом наряду с детерминистическим подходом к описанию процесса сегрегации используются также и вероятностные подходы. Например, в основе модели [63] лежит уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова. Недостатком детерминистических подходов является неучет случайных факторов, а вероятностных — трудности в уста-

новлении функциональной зависимости параметров, входящих в дифференциальное уравнение случайного процесса, от параметров вибрации [60]. Были также предприняты попытки объединить оба типа подходов [64]. Как вариант упрощенной задачи сегрегации часто исследуют задачу о всплывании тяжелого шара в слое сыпучего материала под действием вибрации (см. например [65]).

Существует множество работ, посвященных сегрегации, познакомиться с которыми можно в обзоре [22].

Рассмотрим еще два интересных явления, возникающих в сыпучей среде под действием вибрации.

Гранулярный эффект Лейденфроста

Такое название связано со сходством с обычным эффектом Лейденфроста: левитацией капли воды над раскаленной поверхностью вследствие наличия прослойки пара, которая плохо проводит тепло и не дает капле быстро испариться. В случае сыпучего материала прослойкой пара является слой из быстрых частиц, которые получают энергию от дна сосуда, достаточную, чтобы удержать на весу весь остальной слой материала (рис. 6).

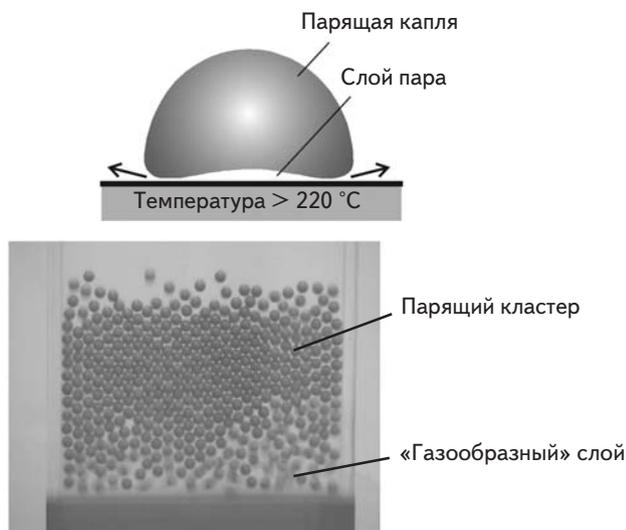


Рис. 6. Обычный и гранулярный эффекты Лейденфроста

В недавних работах [66, 67] построенная авторами гидродинамическая модель адекватно описала наблюдаемый эффект. Эта гидродинамическая модель опирается на работу [68], в которой получены основные уравнения и выражения для коэффициентов переноса в случае, когда $1 - R \ll 1$.

Конвективные течения

Конвекция в сыпучем материале интенсивно исследовалась экспериментально [69–74], численно [75–79] и теоретически [80–84]. И все указанные ис-

следования относились к легкому псевдоожигению ($w < 10$), для которого конвекция главным образом возбуждалась границей (за счет разности сил трения материала о границу при движении сосуда вверх или вниз) и плотность системы оставалась примерно постоянной. Здесь играет большую роль форма сосуда [8, 18]. Например, в цилиндрическом сосуде, как правило, пристенный слой материала опускается вниз, а за счет сохранения объема материала в центре образуется восходящее течение. В V-образном сосуде конвекция меняет свое направление. Отметим работу [85], где конвекция изучалась при сильном псевдоожигении и по высоте конвективных валиков сильно изменялась плотность. Иными словами, в данной работе конвекция возникала в основном за счет подъемной силы. Для изучения конвекции обычно используется гидродинамический подход. К примеру, можно обратиться к работам [80, 83]. В работе Хайна и Мерсона исследовалось начало термоконвекции в «гранулярном газе». Их система представляла собой бесконечный двумерный горизонтальный слой сыпучего материала между абсолютно упругими стенками, в то время как в уже процитированной работе [85] при использовании аналогичного подхода к проблеме было учтено наличие свободной поверхности и рассматривался сыпучий материал произвольной плотности. Поскольку такая постановка задачи более реалистична, рассмотрим ее подробнее.

Согласно экспериментам, проведенным со стальными шариками, конвекция может начинаться как после режима подбрасывания ($3 < F \leq 6$) (когда весь слой материала подпрыгивает над плоскостью как единое целое), так и после режима Лейденфроста ($F > 6$). Начало конвекции обусловлено наличием очень подвижных частиц в слое материала. Эти частицы получили избыток энергии от вибрирующего дна (вследствие статистической флуктуации) и коллективно движутся вверх. Их движение сбалансировано нисходящим движением соседних частиц, что приводит к образованию конвективного валика. Конвекция в сыпучем материале очень похожа на неустойчивость Рэлея–Бенара в обыкновенной жидкости (рис. 7), но с важным отличием: градиент температуры, направленный против силы тяжести, возникает спонтанно вследствие неупругих соударений частиц.

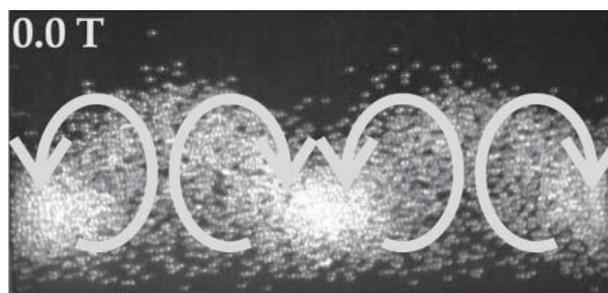


Рис. 7. Конвекция в слое сыпучего материала

При наступлении конвекции нисходящее движение, как правило, в первую очередь образуется вблизи стенок вследствие дополнительной диссипации энергии (трение о стенки).

Заключение

В своем развитии механика сыпучих сред может еще многое дать технике и технологии обогащения полезных ископаемых. В данном обзоре представлены основные методики моделирования сыпучих материалов при вибрационных воздействиях, указаны границы применимости этих подходов и основные факторы, влияющие на выбор конкретного метода моделирования при решении практических задач.

Открытие новых эффектов, более детальное понимание и способность воспроизводить уже обнаруженные явления — ключ к широким возможностям повышения эффективности и экологичности существующих методов переработки сыпучего сырья. Данный обзор может быть полезен для специалистов в области обогащения полезных ископаемых и математического моделирования соответствующих технологических процессов.

Настоящий научный проект выполняется в соответствии с соглашением (грантом) с Министерством образования и науки РФ № 14.579.21.0023 от 05.06.2014 г. 

Список литературы приведен в англоязычном разделе статьи.

Obogashchenie Rud, 2015, No. 4, pp. 21–31.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17580/or.2015.04.05>

MECHANICS OF GRANULAR MEDIA UNDER VIBRATION ACTION: THE METHODS OF DESCRIPTION AND MATHEMATICAL MODELING

1) VAISBERG Leonid Abramovich; 2) REC «Mekhanobr-tehnika» (Russia); 3) Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Engineering Sciences, Professor; 4) Company Scientific Advisor; 5) gornyi@mtspb.com;

1) DEMIDOV Ivan Viktorovich; 2) Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Russia); 4) Postgraduate;

1) IVANOV Kirill Sergeevich; 2) REC «Mekhanobr-tehnika» (Russia); 3) Ph. D. in Engineering Sciences; 4) Researcher; 5) gornyi@mtspb.com.

1) Surname, name, patronymic; 2) Job; 3) Academic degree and knowledge; 4) Position; 5) Contacts.

The article presents a review of the modern methods of computational investigation and modeling of dynamics of granular media under vibration action. Attention is focused on typical states of granular material, realized depending on intensity of vibration action and mechanical characteristics of material. Three «physical states» are distinguished: «elastic-plastic» solid — if mutual arrangement of material particles is changed little, viscous «granular liquid» — if most particles are shifted without breaking contacts, and «granular gaseous» — when time of contact interaction between particles is small in comparison with their free time of flight. Also, three groups of approaches to modeling are distinguished: microscopical — considering material at the level of separate particles, statistical mechanics / kinetic theory — generalizing kinetic theory of gases with respect to inelastic interactions, phenomenological models and continuum mechanical models. A range of applicability and possibilities are specified for each group of models. Application of the described approaches is illustrated by a number of cases of specific behavior of granular materials: Leidenfrost granular effect, granular convection, oscillons, etc.

Key words: granular media, vibration action, physical state of material, mathematical modeling, microscopical models, phenomenological models, continuum mechanical models.

References

1. Jaeger H. M., Nagel S. R., Behringer R. P. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. of Mod. Phys.*, 1996, Vol. 68, No. 4, pp. 1259–1273.
2. Duru P., Nikolas M., Hinch J., Guazzelli E. Constitutive laws in liquid-fluidized beds. *J. Fluid Mech.*, 2002, Vol. 452, pp. 371–404.
3. Pastenes J. C., Geminard J.-C., Melo F. Interstitial gas effect on vibrated granular columns. *Phys. Rev.*, 2014, E 89, 062205.
4. Cafiero R., Luding S., Herrmann H. J. Rotationally driven gas of inelastic rough spheres. *EPL (Europhysics Letters)*, 2002, 60, pp. 854–860.
5. <http://www.elementy.ru>.
6. Burkhardt T. W. Dynamics of inelastic collapse. *Phys. Rev.* 2000, E 63, 011111.
7. Majumdar S. N., Kearney M. J. Inelastic collapse of a ball bouncing on a randomly vibrating platform. *Phys. Rev.*, 2007, E 76, 031130.
8. Wakou J., Kitagishi H., Sakaue T., Nakanishi H. Inelastic collapse in one-dimensional driven systems under gravity. *Phys. Rev.*, 2013, E 87, 042201.
9. Pöschel T., Herrmann H. J. Size segregation and convection. *EPL*, 1995, 29 (2), 123.
10. Goldsmith W. Impact. London, Edward Arnold Ltd., 1960, pp. 257–267.
11. Kuwabara G., Kono K. Restitution coefficient in collision between two spheres. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 1987, 26, Part 1, pp. 1230–1233.
12. Goldman D., Shattuck M. D., Bizon C., McCormick W. D., Swift J. B., Swinney H. L. Absence of inelastic collapse in a realistic three ball model. *Phys. Rev.*, 1998, E 57, No. 4.
13. Brilliantov N. V., Pöschel T. Kinetic theory of granular gases. Oxford University Press, 2004, 340 p.
14. Herbst O., Huthmann M., Zippelius A. Dynamics of inelastically colliding spheres with Coulomb friction: relaxation of translational and rotational energy. *Granular Matter*, 2000, 2, pp. 211–219.
15. Raskin Kh. I. Application of the physical kinetics methods to the problems of vibration effects on granular media. *Doklady Akademii Nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1975, Vol. 220, No. 1, pp. 54–57.

16. Kremer G. M., Santos A., Garzó V. Transport coefficients of granular gas of inelastic rough hard spheres. *Phys. Rev.*, 2014, E 90, 022205.
17. Khalil N., Garzó V., Santos A. Hydrodynamic Burnett equations for inelastic Maxwell models of granular gases. *Phys. Rev.*, 2014, E 89, 052201.
18. Rongali R., Alam M. Higher-order effects on orientational correlation and relaxation dynamics in homogeneous cooling of a rough granular gas. *Phys. Rev.*, 2014, E 89, 062201.
19. Khalil N., Garzó V. Transport coefficients for driven granular mixtures at low density. *Phys. Rev.*, 2013, E 88, 052201.
20. Ogawa S. Multitemperature theory of granular materials. Proc. of the US - Japan Seminar on Contin-Mechanical and Statistical Approaches Mechanical Granular Material. Tokyo, Gukujustu Bunken Fukuyakai, 1978, p. 208.
21. Warr S., Jacques G. T. H., Huntley J. M. Fluidization of a two-dimensional granular system: Experimental study and scaling behavior. *Phys. Rev.*, 1995, E 52, pp. 5583–5595.
22. Kudrolli A. Size separation in vibrated granular matter. *Rep. Prog. Phys.*, 2004, 67, pp. 209–247.
23. Losert W., Cooper D. G. W., Delour J., Kudrolli A., Gollub J. P. Velocity statistics in vibrated granular media. *Chaos*, 1999, 9, pp. 682–690.
24. Feitosa K., Menon N. Breakdown of energy equipartition in a 2D binary vibrated granular gas. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88, 198301.
25. Wildman R. D., Parker D. J. Coexistence of two granular temperatures in binary vibrofluidized beds. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88, 064301.
26. Trujillo L., Herrmann H. J. A note on the upward and downward intruder segregation in granular media. *Granular Matter*, 2003, Vol. 5, No. 2, pp. 85–89.
27. Socolar J. E. S., Schaeffer D. G., Claudin P. Directed force chain networks and stress response in static granular materials. *European Physics Journal*, 2002, Vol. 7, pp. 353–370.
28. Lohse D., Bergmann R., Mikkelsen R., Zeilstra C., van der Meer D., Versluis M., van der Weele K., van der Hoef M., Kuipers H. Impact on soft sand: void collapse and jet formation. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 198003.
29. Wakou J., Brito R., Ernst M. Towards a Landau–Ginzburg-type theory for granular fluids. *Journal of Statistical Physics*, 2002, Vol. 107, Nos. 1/2, pp. 3–22.
30. Eshuis P. Collective phenomena in vertically shaken granular matter. Universiteit Twente, 2008, 186 p.
31. Fouxon I. Inhomogeneous quasistationary state of dense fluids of inelastic hard spheres. *Phys. Rev.*, 2014, E 89, 052210.
32. Chen Y., Hou M., Jiang Y., Liu M. Hydrodynamics of granular gases with a two-peak distribution. *Phys. Rev.*, 2013, E 88, 052204.
33. Brito R., Risso D., Soto R. Hydrodynamic modes in a confined granular fluid. *Phys. Rev.*, 2013, E 87, 022209.
34. Reyes F. V., Santos A., Garzó V. Non-Newtonian granular hydrodynamics. What do the inelastic simple shear flow and the elastic fourier flow have in common? *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104, 028001.
35. Goldhirsch I., Zanetti G. Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70, pp. 1619–1622.
36. Soto R., Mareschal M., Malek Mansour M. Nonlinear analysis of the shearing instability in granular gases. *Phys. Rev.*, 2000, E 62, 3836.
37. Thoroddsen S. T., Shen A. Q. Granular jets. *Phys. Fluids*, 2001, 13, pp. 4–6.
38. Ostrovskiy G. M. *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* (Applied mechanics of inhomogeneous media). St. Petersburg, Nauka, 2000, 359 p.
39. Bouchaud J.-P., Claudin P., Levine D., Otto M. Force chain splitting in granular materials: A mechanism for large scale pseudo-elastic behaviour. *Eur. Phys. J.*, 2001, E 4, pp. 451–457.
40. Digby P. J. The effective elastic moduli of porous granular rocks. *J. Appl. Mech.*, 1981, 48 (4), pp. 803–808.
41. Owens E. T., Daniels K. E. Sound propagation and force chains in granular materials. *EPL*, 2011, 94, 54005.
42. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1831, Vol. 121, pp. 299–340.
43. Umbanhowar P. B., Melo F., Swinney H. L., Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 1996, 382, pp. 793–796.
44. Lioubashevski O., Hamiel Y., Agnon A., Reches Z., Fineberg J. Oscillons and propagating solitary waves in a vertically vibrated colloidal suspension. *Phys. Rev.*, 1999, 83, pp. 3190–3193.
45. Hunt C. R. The emergence of oscillons in granular media. Physics 569 Emergent States of Matter, 2008. URL: http://guava.physics.uiuc.edu/~nigel/courses/569/Essays_Fall2008/files/hunt.pdf (date accessed 04.08.2015).
46. Tsimring L., Aranson I. Localized and cellular patterns in a vibrated granular layer. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, Vol. 79, pp. 213–216.
47. Cerda E., Melo F., Rica S. Model for subharmonic waves in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, Vol. 79 (23), pp. 4570–4573.
48. Crawford C., Riecke H. Oscillon-type structures and their interaction in a Swift–Hohenberg model. *Physica D*, 1999, Vol. 129, pp. 83–92.
49. Barashenkov I. V., Alexeeva N. V., Zemlyanaya E. V. Two- and three-dimensional oscillons in nonlinear Faraday resonance. *Phys. Rev.*, 2002, Vol. 89 (10), 104101.1–104101.4.
50. Gleiser M., Sicilia D. General theory of oscillon dynamics. *Phys. Rev. D*, 2009, 80, 125037.
51. Petrov V., Ouyang Q., Swinney H. Resonant pattern formation in a chemical system, *Nature*, 1997, Vol. 388, pp. 655–657.
52. Vanag V., Zhabotinsky A., Epstein I. Oscillatory clusters in the periodically illuminated, spatially extended Belousov–Zhabotinsky reaction. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86, pp. 552–555.

53. Trizac E., Barrat A. Free cooling and inelastic collapse of granular gases in high dimensions. *Eur. Phys. J.*, 2000, E 3, pp. 291–294.
54. Burton J. C., Lu P. Y., Nagel S. R. Collision dynamics of particle clusters in a two-dimensional granular gas. *Phys. Rev.*, 2013, E 88, 062204.
55. Blekhman I. I., Dzhanelidze G. Yu. *Vibratsionnoye peremeshcheniye* (Vibrational displacement). Moscow, Nauka, 1964, 410 p.
56. Palmov V. A. Description of complex dynamic systems high frequency vibration using the theory of heat conduction. *Izbrannyye problemy prikladnoy mekhaniki. Sbornik, posvyashchenny 60-letiyu akademika V. N. Chelomeya* (Selected problems of applied mechanics. Collection, dedicated to the 60th anniversary of academician V. N. Chelomey). Moscow, VINITI, 1974, pp. 535–542.
57. Blekhman I. I. *Chto mozhet nauka? O «vibratsionnoy mekhanike» i vibratsionnoy tekhnike* (What can the vibration? About «vibration mechanics» and vibration engineering). Moscow, Nauka, 1988, 208 p.
58. Arsenyev V. A., Vaisberg L. A., Ustinov I. D. Trends in development of low-water-consumption technologies and machines for finely ground mineral materials processing. *Obogashchenie Rud*, 2014, No. 5, pp. 3–9.
59. Blekhman I. I., Blekhman L. I., Vaisberg L. A., Ivanov K. S. Revisiting the models of vibration screening process. *Vibroengineering PROCEDIA*, 2014, Vol. 3, pp. 169–174.
60. Blekhman I. I. *Teoriya vibratsionnykh protsessov i ustroystv* (Theory of vibration processes and devices). St. Petersburg, «Ore and Metals» Publishing House, 2013, 640 p.
61. Kremer E. B., Fidin A. Ya. Dimensional dynamic continuum model of granular material. *Doklady Akademii Nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1989, Vol. 309, No. 4.
62. Eshuis P., van der Weele K., Calzavarini E., Lohse D., van der Meer D. Exploring the limits of granular hydrodynamics: A horizontal array of inelastic particles. *Phys. Rev.*, 2009, E 80, 011302.
63. Nepomnyashchiy E. A. Mathematical description of bulk materials separation kinetics. *Trudy VNIIZ* (VNIIZ Proceedings). Moscow, 1967, Iss. 61–62.
64. Blekhman I. I., Khaynman V. Ya. On the theory of granular mixtures separation under vibration. *Inzhenernyy Zhurnal. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, 1968, No. 1, pp. 5–13.
65. Möbius M. E., Cheng X., Eshuis P., Karczmar G. S., Nagel S. R., Jaeger H. M. The effect of air on granular size separation in a vibrated granular bed. *Phys. Rev.*, 2005, E 72, 011304.
66. Eshuis P., van der Weele K., van der Meer D., Lohse D. Granular Leidenfrost effect: Experiment and theory of floating particle clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95, 258001.
67. Meerson B., Pöschel T., Bromberg Y. Close-packed floating clusters: Granular hydrodynamics beyond the freezing point? *Phys. Rev. Lett.*, 2003, 91, 024301.
68. Grossman E. L., Zhou T., Ben-Naim E. Towards granular hydrodynamics in two-dimensions. *Phys. Rev.*, 1997, E 55, 4200.
69. Hsiau S. S., Chen C. H. Granular convection cells in a vertical shaker. *Powder Technology*, 2000, 111, pp. 210–217.
70. Wildman R. D., Huntley J. M., Parker D. J. Convection in highly fluidized three-dimensional granular beds. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86, pp. 3304–3307.
71. Garcimartin A., Maza D., Ilquimiche J. L., Zuriguel I. Convective motion in a vibrated granular layer. *Phys. Rev.*, 2002, E 65, 031303.
72. Hsiau S. S., Wang P. C., Tai C. H. Convection cells and segregation in a vibrated granular bed. *AIChE J*, 2002, 48, pp. 1430–1438.
73. Tai C. H., Hsiau S. S. Dynamics behaviors of powders in a vibrating bed. *Powder Technology*, 2004, 139, pp. 221–132.
74. Rodriguez-Linan G. M., Nahmad-Molinari Y. Granular convection driven by shearing interial forces. *Phys. Rev.*, 2006, E 73, 011302.
75. Ramírez R., Risso D., Cordero P. Thermal convection in fluidized granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85, pp. 1230–1233.
76. Sunthar P., Kumaran V. Characterization of the stationary states of a dilute vibrofluidized granular bed. *Phys. Rev.*, 2001, E 64, 041303.
77. Talbot J., Viot P. Wall-enhanced convection in vibrofluidized granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 89, 064301.
78. Cordero P., Ramirez R., Risso D. Buoyancy driven convectino and hysteresis in granular gases: Numerical solution. *Physica A*, 2003, 327, pp. 82–87.
79. Risso D., Soto R., Godoy S., Cordero P. Friction and convection in a vertically vibrated granular system. *Phys. Rev.*, 2005, E 72, 011305.
80. Hayakawa H., Yue S., Hong D. C. Hydrodynamic description of granular convection. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75, pp. 2328–2331.
81. He X., Meerson B., Doolen G. Hydrodynamics of thermal granular convection. *Phys. Rev.*, 2002, E 65, 030301.
82. Ohtsuki T., Ohsawa T. Hydrodynamics for convection in vibrating beds of cohesionless granular materials. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 2003, 72, pp. 1963–1967.
83. Khain E., Meerson B. Onset of thermal convection in a horizontal layer of granular gas. *Phys. Rev.*, 2003, E 67, 021306.
84. Miao G., Huang K., Yun Y., Wei R. Active thermal convection in vibrofluidized granular systems. *Eur. Phys. J.*, 2004, B 40, pp. 301–304.
85. Eshuis P., van der Meer D., Alam M., van Gerner H. J., van der Weele K., Lohse D. Onset of convection in strongly shaken granular matter. *Phys. Rev.*, 2010, 104, 038001.

Acknowledgements

The work was performed under the Ministry of Education and Science of the Russian Federation grant No. 14.579.21.0023 from 05.06.2014.